**Урок по теме "Формула бинома Ньютона".**

**Цели урока:**

**Предметные**:  
– сформировать умение возводить двучлен в натуральную степень;  
– умение находить биноминальные коэффициенты, используя треугольник Паскаля;

**Личностные**:  
– развитие логического мышления, таких мыслительных операций, как синтез и анализ, обобщение и сравнение;  
– развитие умения выдвигать гипотезы при решении учебной задачи и понимание необходимости их проверки;  
**Метапредметные:**– способность и готовность к самостоятельному поиску методов решения практических задач, применению различных методов познания.

**Методы:** проблемно-диалогический, объяснительно – иллюстративный, частично-поисковый.

**Оборудование:** школьная доска, компьютер, проектор.

**Раздаточный материал:** “Треугольник Паскаля”, карточки для самостоятельной работы

**Ход урока**

**1. Организационный момент.**

Сообщение темы, целей урока, практической значимости рассматриваемой темы.

**2. Актуализация опорных знаний и постановка проблемы.**

**На экране** [**фрагмент**](http://festival.1september.ru/articles/631457/pril2.wmv) **фильма “Мастер и Маргарита”**

**Комментарий к фрагменту.**

О биноме Ньютона речь идет в романе “Последнее дело Холмса”Конан Дойля Позже это же выражение упомянуто в фильме “Сталкер” А.А.Тарковского. Бином Ньютона упоминается в фильме “Расписание на послезавтра”, в повести Льва Толстого “Юность” в эпизоде сдачи вступительных экзаменов в университет Николаем Иртеньевым и в романе Замятина “Мы”.

Когда хотят подчеркнуть, что собеседник преувеличивает сложность задач, с которыми он столкнулся, говорят: “Тоже мне бином Ньютона!” Дескать, вот бином Ньютона, это сложно, а у тебя какие проблемы! Что же это за формула такая и почему о ней слышали даже те люди, чьи интересы никак не связаны с математикой?

Так что же такое бином Ньютона?

Вопросы к учащимся:

прочитайте выражения: (х +2у)2, (а- b)3, (c - d)2, (а+1)3, (с+3а)4, (х -2)5.

(квадрат суммы двух выражений х и 2у; куб разности двух выражений а и b; и т.д.)

Что общего в заданных выражениях?

(каждый случай является какой либо степенью многочлена из двух выражений или степенью двучлена.)

Представьте каждую степень двучлена в виде многочлена. Какими формулами воспользуетесь?

Формулами квадрата суммы и разности, куба суммы и разности для первых четырёх примеров, для 5 и 6 придётся степень представить в виде произведения степеней и выполнить умножение многочленов.

(х +2у)2 = х2 +4ху + 4у2

(а - 2)3 = а3 - 3а2 2 +3а 22 - 23= а3 - 6а2+12а -8.

(c - 0,1d)2 = с2 - 0,2cd + 0,01d2.

(а+2у)3 = а3 + 3а22у +3а(2у)2 +(2у)3= а3 + 6а2у +12ау2 +8у3.

(с+а)4 = (с+а)2 (с+а)2 = (с2 +2са + а2) (с2 +2са +а2) =

= с4 + 2ас3 +а2с2 + 2ас3 +4а2с2 +2а3с +а2с2 +2а3с +а4 =

= с4+ 4с3а +6с2а2 + 4са3 +а4.

(х -2)5 = (х -2)3(х -2)2 = (х3 - 6х2 +12х - 8) (х2 - 4х+ 4) =

= х5 - 4х4 +4х3 - 6х4 +24х3 - 24х2 +12х3 - 48х2 + 48х - 8х2 +32х -32 =

= х5 -10х4 + 40х3 - 80х2 +80х -32. (рис. № 2)

Все случаи представляли собой степень двучлена, почему же в одних случаях пример решался легко и быстро, а в других сложно и долго?

(Выше степень двучлена, нет известной формулы сокращённого умножения для этих степеней.)

В каждом примере приходилось приводить подобные слагаемые, их количество было различным, как вы думаете, отчего зависело количество подобных слагаемых?

Логично предположить, что если есть формулы для второй и третьей степени двучлена, то возможно существует формулы и для более высоких степеней.

И количество подобных слагаемых тоже подчиняется какой-либо закономерности.

**3. Введение нового материала.**

Но прежде чем рассмотреть саму формулу, вспомним определения сочетания и числа сочетаний, используемые в формуле бином Ньютона.

Определение: Число всех возможных сочетаний из n элементов по m элементов обозначается Сhttp://festival.1september.ru/articles/567990/Image396.gif, читается С из n по m, вычисляется по формуле:

Сhttp://festival.1september.ru/articles/567990/Image397.gif= http://festival.1september.ru/articles/567990/Image398.gif, где n! = 1 2 3 ::. (n-2)(n-1)n (читается n-факториал).

Отметим некоторые свойства числа сочетаний:

Сhttp://festival.1september.ru/articles/567990/Image397.gif= Сhttp://festival.1september.ru/articles/567990/Image399.gif;

Сhttp://festival.1september.ru/articles/567990/Image400.gif= Сhttp://festival.1september.ru/articles/567990/Image401.gif= 1;

Сhttp://festival.1september.ru/articles/567990/Image402.gif= Сhttp://festival.1september.ru/articles/567990/Image403.gif + Сhttp://festival.1september.ru/articles/567990/Image404.gif , где n, r >1 (рис. № 3)

Рассмотрим пример: Сколько различных двузначных чисел можно составить из данных 5 цифр:1,2,3,4,5.

Решение: Данные цифры - это множество, состоящее из 5 элементов. Составить двузначные числа - это значит найти все подмножества из двух элементов, то есть сочетания из 5 по 2. Их число посчитаем по формуле Сhttp://festival.1september.ru/articles/567990/Image405.gif= http://festival.1september.ru/articles/567990/Image406.gif= http://festival.1september.ru/articles/567990/Image407.gif=10.

Таким образом, 10 двузначных чисел можно построить из элементов заданного множества. Вы можете это проверить простым перебором, при небольших значениях n и m, это несложно.

Мы вплотную подошли к количеству подобных слагаемых в разложении степени двучлена на многочлен.

Вернёмся к примеру №5: (с+а)4 = с4+ 4с3а +6с2а2 + 4са3 +а4, что означают коэффициенты перед слагаемыми?

Столько раз эти слагаемые встретились при приведении подобных слагаемых в многочлене. Количество этих слагаемых есть не что иное, как число сочетаний Сhttp://festival.1september.ru/articles/567990/Image397.gif, где n - степень двучлена , m - степень второго выражения.

Степень одного из множителей в одночленах с3а или са3 равна 1, количество таких слагаемых, по определению сочетания, равно Сhttp://festival.1september.ru/articles/567990/Image408.gif = http://festival.1september.ru/articles/567990/Image409.gif=http://festival.1september.ru/articles/567990/Image410.gif=4, что подтверждается вашими вычислениями. Проверим нашу гипотезу на слагаемом 6с2а2 : Сhttp://festival.1september.ru/articles/567990/Image411.gif = http://festival.1september.ru/articles/567990/Image409.gif=http://festival.1september.ru/articles/567990/Image412.gif=6, что также верно. Заметим, что первое и последнее слагаемое стоит с коэффициентом 1, так как степень одного из выражений в этом одночлене равна 0, а по свойствам сочетаний Сhttp://festival.1september.ru/articles/567990/Image400.gif= Сhttp://festival.1september.ru/articles/567990/Image401.gif= 1.

Можно проверить на известных формулах квадратов и кубов, что коэффициенты перед слагаемыми подчиняются той же закономерности.

Теперь обратим внимание на степени первого и второго выражений в одночленах, запишем ещё раз примеры №№1-6, опуская само решение:

(х +2у)2 = х2 +4ху + 4у2

(а - 2)3 = а3 - 6а2+12а -8.

(c - 0,1d)2 = с2 - 0,2cd + 0,01d2.

(а+2у)3 = а3 + 6а2у +12ау2 +8у3.

5. (с+а)4 = с4+ 4с3а +6с2а2 + 4са3 +а4.

6. (х -2)5 = х5 - 5 2 х4 + 10 22 х3 - 10 23 х2 + 5 24 х -32 =

= х5 -10х4 + 40х3 - 80х2 +80х -32. (рис. № 5)

Что вы заметили?

Объединим ваши замечания в следующие правила:

Каждый одночлен является произведением первого и второго выражения в различных степенях и некоторого числа;

Степени всех одночленов равны степени двучлена в условии;

Степень первого выражения одночлена в разложении убывает, начиная со степени двучлена и заканчивая нулевой;

Степень второго выражения одночлена в разложении возрастает, начиная с нулевой и заканчивая степенью двучлена.

Коэффициенты при слагаемых многочлена равны числу сочетаний Сhttp://festival.1september.ru/articles/567990/Image397.gif, где n - степень двучлена , m - переменная величина, пробегающая значения от 0 до n и соответствующая степени второго выражения.

А теперь запишем формулу бинома Ньютона - формулу представления степени двучлена в многочлен.

Определение:

Для каждого натурального числа n и произвольных чисел a и b имеет место равенство

(a+b)n = Сhttp://festival.1september.ru/articles/567990/Image413.gifan+ Сhttp://festival.1september.ru/articles/567990/Image414.gifan-1 b + Сhttp://festival.1september.ru/articles/567990/Image415.gifan-2 b2 +:.+ Сhttp://festival.1september.ru/articles/567990/Image416.gifan-r br +:.+ Сhttp://festival.1september.ru/articles/567990/Image417.gifbn.

Равенство называется формулой бинома Ньютона, числа Сhttp://festival.1september.ru/articles/567990/Image416.gif- биномиальными коэффициентами. (рис. № 7)

Запишем пример № 6, используя бином Ньютона:

(х -2)5 = Сhttp://festival.1september.ru/articles/567990/Image418.gifх5 + Сhttp://festival.1september.ru/articles/567990/Image419.gifх4(-2)1 + Сhttp://festival.1september.ru/articles/567990/Image420.gifх3 (-2)2 + Сhttp://festival.1september.ru/articles/567990/Image421.gifх2 (-2)3 +Сhttp://festival.1september.ru/articles/567990/Image422.gifх1 (-2)4 +Сhttp://festival.1september.ru/articles/567990/Image423.gif(-2)5=

Посчитаем биномиальные коэффициенты, используя определение и свойства числа сочетаний:

Сhttp://festival.1september.ru/articles/567990/Image418.gif= Сhttp://festival.1september.ru/articles/567990/Image424.gif=1; Сhttp://festival.1september.ru/articles/567990/Image419.gif= Сhttp://festival.1september.ru/articles/567990/Image422.gif=http://festival.1september.ru/articles/567990/Image425.gif=5; Сhttp://festival.1september.ru/articles/567990/Image420.gif= Сhttp://festival.1september.ru/articles/567990/Image421.gif=http://festival.1september.ru/articles/567990/Image426.gif=http://festival.1september.ru/articles/567990/Image427.gif=10.)

=х5 -5х4 2+ 10х322 - 10х223 +5х 24-25= х5 -10х4 + 40х3 - 80х2 +80х -32.

Как видите, мы достигли того же результата, но гораздо быстрее.

И можем добавить ещё одно правило к правилам.

Что ещё, связанное с коэффициентами вы заметили?

Крайние коэффициенты равны 1, и все коэффициенты симметричны, относительно середины.

Добавим ещё одно правило, связанное со знаками между одночленами, в формуле бином Ньютона задана сумма, у нас же появились минусы.

Степень разности будет представлена в виде многочлена, знаки в котором чередуются, начиная со знака +, так как нечётная степень отрицательного выражения будет отрицательной, чётная степень всегда положительна.

Подведём итоги, что мы знаем о способе разложения степени двучлена в многочлен по формуле бином Ньютона.

Формула бином Ньютона имеет вид:

(a+b)n = Сhttp://festival.1september.ru/articles/567990/Image413.gifan+ Сhttp://festival.1september.ru/articles/567990/Image414.gifan-1 b + Сhttp://festival.1september.ru/articles/567990/Image415.gifan-2 b2 +:.+ Сhttp://festival.1september.ru/articles/567990/Image416.gifan-r br +:.+ Сhttp://festival.1september.ru/articles/567990/Image417.gifbn.

Каждый одночлен является произведением первого и второго выражения в различных степенях и некоторого числа;

Степени всех одночленов раны степени двучлена в условии;

Степень первого выражения одночлена в разложении убывает, начиная со степени двучлена и заканчивая нулевой;

Степень второго выражения одночлена в разложении возрастает, начиная с нулевой и заканчивая степенью двучлена.

Коэффициенты при слагаемых многочлена равны числу сочетаний Сhttp://festival.1september.ru/articles/567990/Image397.gif, где n - степень двучлена , m - переменная величина, пробегающая значения от 0 до n и соответствующая степени второго выражения.

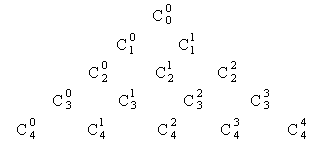
Крайние коэффициенты равны 1, и все коэффициенты симметричны, относительно середины.

Степень разности будет представлена в виде многочлена, знаки в котором чередуются, начиная со знака +, так как нечётная степень отрицательного выражения будет отрицательной, чётная степень всегда положительна.

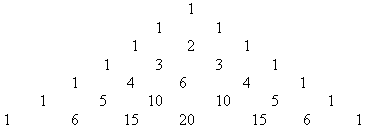
Вы видите, насколько рационализируется работа по возведению двучлена в степень, если использовать бином Ньютона. Но на самом деле нашу работу можно ещё упростить. Достаточно долго вы вычисляли биномиальные коэффициенты, а коэффициенты - это сочетания. Посмотрите внимательно, все ли свойства сочетаний, которые были ранее введены, мы использовали?

Свойство Сhttp://festival.1september.ru/articles/567990/Image402.gif= Сhttp://festival.1september.ru/articles/567990/Image403.gif + Сhttp://festival.1september.ru/articles/567990/Image404.gif, где n, r ?1 (1) осталось не востребованным, именно его используют при построении треугольника Паскаля.

Определение: Треугольник Паскаля - это треугольник, составленный из чисел, являющихся коэффициентами в формуле бином Ньютона.



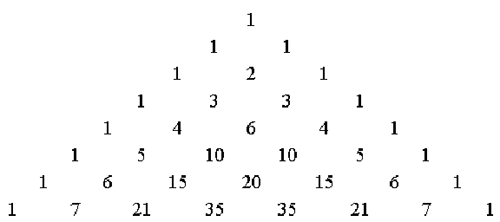
Каждый крайний элемент равен 1, а каждый не крайний элемент равен сумме двух своих верхних соседей (свойство (1)).



Треугольник можно продолжать до бесконечности, но на практике чаще составляют таблицу для первых 10 степеней.

**У доски ученик записывает формулу**.

Коэффициенты разложения степени бинома легко найти по следующей схеме, которая называется “треугольник Паскаля”, по имени французского математика Блез Паскаля (1623–1662)



Каждый крайний элемент равен 1, а каждый не крайний элемент равен сумме двух своих верхних соседей.

**Комментарий к презентации**:

Блез Паскаль умер в 39 лет, но, несмотря на столь короткую жизнь, он вошел в историю как выдающийся математик, физик, философ и писатель. Его именем благодарными потомками названы единица давления(паскаль) и получивший чрезвычайно широкое распространение язык программирования. Но, наверное, самой известной математической работой Блеза Паскаля является “Трактат об арифметическом треугольнике”, образованном биноминальными коэффициентами, который имеет применение в теории вероятностей, комбинаторики, математическом анализе, теории чисел и обладает удивительными и занимательными свойствами. Кстати, одну из первых теорем в проективной геометрии Паскаль доказал в возрасте 16 лет.

Именно И.Ньютон в 1664–1665 гг. вывел формулу, выражающую степень двучлена для произвольных дробных и отрицательных показателей.

**4.Найти разложение бинома (у каждого на парте треугольник Паскаля).**

**1. У доски вместе с учителем**

**№ 1. ( х +у)5** = х5 + 5х4у + 10х3у2 + 10х2у 3+ 5ху4 + у5

**№ 2 (1 + 2а)4** = 14 + 4·13·2а + 6·12·(2а)2 + 4· 11·(2а)3 + (2а)4 =

1 + 8а + 24а2 + 32а3 + 16а4

**№3 (х – у)6** = (х + (-у))6 = х6 + 6х5(-у) + 15х4(-у)2 + 20х3(-у)3 +

15х2(-у)4 + 6х(-у)5 + у6= х6– 6х5у +15х4у2– 20х3у3 + 15х2у4 – 6ху5+ у6.

**5. Практическая работа. (с. 332, №1092**).

**6. Обучающая самостоятельная работа с последующей проверкой (рефлексия).**

1. ( 1 + 3а)4   
2. (2а – в)53. (3в + 1)4   
4. (х – 2у)5

**7. Подведение итогов самостоятельной работы.**

**8. Домашнее задание:**

Выучить формулу бином Ньютона.

Выучить формулы числа сочетаний и их свойства.

Представить в виде многочлена:

(х - 1)7

(2х - ?)4

Свернуть сумму в степень двучлена, если это возможно

81х4 - 108х3у + 54х2у2 - 12ху3 + у4.

32а5+40a4b +20a3b2 +5a2b3 +5/8ab4 +1/32b5

9.Итог урока. Оценки за урок.